特集　数理情報

研究ノート

純粋数学および応用数学から見た方程式

伊 東 杏 希 子*

本稿では，純粋数学および応用数学における方程式の理論を紹介する．まず，整数論に画期的な進展をもたらした岩澤理論とフェルマーの最終定理を通して，純粋数学における方程式の研究の大切さを振り返る．岩澤理論においてグリーンバーグ予想と呼ばれる未解決問題が知られているが，この予想が成り立つ実二次体のある無限族の存在を示した著者の最近の結果についても言及する．次に，シンプレクティック幾何学における埋め込み問題を通して，方程式の性質は様々な分野の問題の研究にも役立つことを述べる．楕円体E（1，a）からpolydisc P（A+ε，A−ε）へのシンプレクティック埋め込みに関する著者の最近の結果にも言及する．最後に，数理ファイナンスにおけるブラック・ショールズ方程式を中心に，微分方程式が社会現象や自然現象の分析に役立つことを述べる．

キーワード：数学，整数論，岩澤理論，数理ファイナンス，微分方程式

Theory of Equations: Pure Mathematics and Applied Mathematics

Akiko ITO*

In this paper, we state theories of equations in pure and applied mathematics. First, we review Iwasawa Theory and Fermat's Last Theorem, historical development in number theory. These tell us the importance of studying equations. In Iwasawa Theory, an open problem "Greenberg's Conjecture" is known. Recently, the author proved the existence of certain infinite families of real quadratic fields for which this conjecture holds true. We also state this. Secondly, we review embedding problem in symplectic geometry. The author showed some property of symplectic embeddings of 4-dimensional ellipsoids E (1, a) into polydiscs P (A + ε, A − ε) by using equations. We can use some properties of equations to investigate various problems. Thirdly, we focus on Black-Scholes equation in mathematical finance and explain that differential equations are very useful to analyze social and natural phenomenon.

Keywords: Mathematics, Number Theory, Iwasawa Theory, Mathematical Finance, Differential Equation

*東京情報大学　総合情報学部
Faculty of Informatics, Tokyo University of Information Sciences

2017年５月15日受付
2017年７月14日受理

1　序

かつて, 次のような問題を解いたことがある.

問 1. 次の方程式を解きなさい.

(1) $2x = 1$

(2) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

(1) の解は $x = \dfrac{1}{2}$ である. (2) は例えば, 二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

を用いて

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

となる.

方程式は現在でも重要な研究テーマである. 本稿では, 現代数学における方程式がどのようなものであるかを述べる.

２節から４節は, 純粋数学から見た方程式についてである.

方程式の問題の追究から独創的な研究分野が生み出されることがある. 学生時代以降, 著者は主に整数論の分野の一つ「岩澤理論」を研究してきた. この分野は, フェルマーの最終定理の解決を目的に進展した「クンマーの理論」の一般化として独自に深化してきた分野である (加藤 1995) [7], (Washington 1996) [21], (黒川ほか 2005) [11]. ２節では岩澤理論を紹介し, 関連する著者の最近の結果を述べる.

方程式は他の問題の研究にも役立つ. 整数論の研究で数列を用いていた際に偶然, 幾何学の一分野「シンプレクティック幾何学」における「埋め込み問題」にたどり着いた. この問題へのアプローチの一つに, (時にはコンピュータも用いて) 多数の方程式を解くことによる先行研究の精密化がある. ３節ではシンプレクティック埋め込み問題を紹介し, 関連する著者の最近の結果を述べる.

方程式は歴史ある研究分野を大規模に進展させることもある. 現在, 整数論最大の未解決問題の一つは「ラングランズ予想」と言われている (黒川ほか 2005) [11], (加藤 2009) [8]. ４節では,「フェルマーの最終定理」から「ラングランズ予想」までの歩みを岩澤理論との関連性にも触れながら紹介する.

５節と６節では, 応用数学から見た方程式についての解説を記す.

社会現象や自然現象などを分析する方法の一つに「数式による表示」がある. ５節では, 人口増加問題や広告効果の検証, 放射性炭素年代測定法など身近な話題に微分方程式を適用した例を紹介する.

数学は経済学とも関係が深い. 実際,「数理ファイナンス」という金融・証券市場の動向を数学により分析する分野が存在する. ６節では, 数理ファイナンスの分野に大きな進展をもたらした「ブラック・ショールズ方程式」を紹介する.

2　岩澤理論

2.1　「対応」

岩澤理論 (Washington 1996) [21], (黒川ほか 2005) [11] について述べる際に「対応」という概念が必要となる. 二次関数の問題を例に, その概念を説明する.

問 2. (1) 二次関数

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

の頂点と軸を求めなさい.

(2) k を正の実数とする. 方程式

$$(x - 2)^2 - 1 = k$$

を満たす実数解 x の個数を求めなさい.

(1) は $y = (x-2)^2 - 1$ という数式から, 頂点 $(2, -1)$, 軸 $x = 2$ と直ちに分かる. (2) はグラフから判定できる.

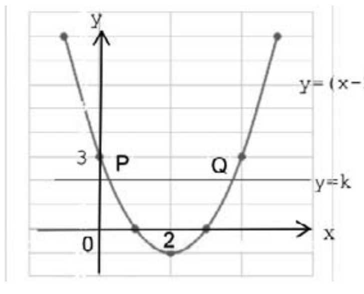

図 1 : 二次関数のグラフ

図 1 より放物線 $y = (x-2)^2 - 1$ と直線 $y = k$ の交点は P, Q の二点であるため, 実数解 x の個数は二個である.

純粋数学は代数, 解析, 幾何, 統計・情報の四つの分野に分類される. 代数学では主に, 式変形により集

合の構造を研究する. 解析学では主に, 微積分を用いて関数の性質を研究する. 幾何学では主に, 図形や立体 (大学以降では「多様体」と呼ぶ) の性質を研究する.

この用語を用いると, 上記では問 2 (1) を代数的に, (2) を幾何的に解いたことになる. 本来は別の分野に属す数式と曲線がグラフを通して同一視できるというアイディアをもとに, 異なる分野「代数」と「幾何」の手法を用いて一つの関数 $y = (x - 2)^2 - 1$ の性質を考察したのである. このように, 異なる分野に属する対象が同一物と見なされる関係を「対応」という (図 2).

代数		幾何
	対応	
<u>数式</u>	$\leftrightarrow$	<u>曲線</u>
$y = (x - 2)^2 - 1$	$\leftrightarrow$	ある放物線
$y = (x - 4)^2 - 3$	$\leftrightarrow$	別の放物線
$\vdots$	$\leftrightarrow$	$\vdots$

図 2 : 数式と曲線の対応

岩澤理論は p 進数 (p は素数) に関する代数-解析間の「対応」の理論である.

2.2 萌芽

整数論は整数, 特に, 素数の性質を研究する代数学の一分野である. 岩澤理論は 1950 年代に岩澤健吉により創始され, 1 節で述べたように「クンマーの理論」の一般化として独自に深化してきた分野である.

フェルマーの最終定理の証明の難点としてクンマーの時代から挙げられていたものは, 素因数分解の複雑さである (Washington 1996) [21]. これを測る尺度として「イデアル類群」と呼ばれるものが当時から導入されていた. 岩澤は, 素因数分解の複雑さを系統的に捉える試みとしてイデアル類群に独自の切り口を加えた. 後にこれは「岩澤不変量」と呼ばれるようになる (Washington 1996) [21], (黒川ほか 2005) [11].

当初, 岩澤不変量はかなり抽象的に定義された整数であって, 計算が不可能であった. しかし, これでは素因数分解の複雑さが測れない. そこで, 岩澤不変量の計算方法の確立がこの分野の重要な課題となった. p 進数 (p は素数) に関する代数-解析間の「対応」が証明されたことにより, この課題は解決された. 以降でこれを述べる.

2.3 p 進数と p 進解析

10 進数における 325 は

$$325 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

という意味である. コンピュータなどで用いる 2 進数において, 1101 は

$$1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

という意味である. 10 進数の 13 と等しい.

2 進数, 3 進数, 5 進数, ⋯といった素数進数 (p 進数) は, 普通の数 (実数) とは異なる距離感を持つ. 例えば, 実数では 8 の方が 1 よりも 26 に近い. しかし, 5 進数では絶対値の定義から 1 の方が 8 よりも 26 に近くなる.

関数 $f(x) = x^2$ について, $f(1) = 1^2 = 1$, $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}^2 = 3$ である. 普段, x には実数を代入している. これに対し, x に p 進数を代入すると p 進数値関数ができる.

p 進数値関数にも微積分は存在する. 微分は極限値を用いて定義されるので, 距離とも関係がある. 上記のように p 進数での距離感は実数の場合とは異なるため, p 進数値関数での微分も通常の微分とは異なる.

p 進数値関数における微積分 (より一般に解析学) を研究する分野を「p 進解析」という (Katok 2007) [9]. 現在, 目覚ましく進展している.

2.4 中核

メイザー・ワイルスの定理 (岩澤主予想) を中心に, 岩澤理論の中核には, 代数的対象「p 進数を用いて測る素因数分解の複雑さの尺度」と解析的対象「ある p 進数値関数から決まる値」が同一物になるという代数-解析間の「対応」がある (図 3). 前者に岩澤不変量も含まれる.

岩澤理論		
代数		解析
素因数分解	対応 ↔	p 進数値関数

図 3 : 岩澤理論における対応

解析的対象の「ある p 進数値関数」は特徴的, かつ, 非常に具体的な関数であり, p 進解析ならではの性質を用いて定義される. この「対応」により, 素因数分解の複雑さと p 進数値関数から決まる値が同一物となったため, 計算方法の確立が課題となっていた岩澤不変量が p 進数値関数から計算できるようになった. 現在では, コンピュータを用いた岩澤不変量の数表が作成されるほどである.

岩澤不変量が具体的に導出できるようになったことで, これまでアプローチ不可能だった多くの問題が解決した. 「対応」のおかげである.

2.5　主結果

数式と曲線の同一視 (2.1 節参照) は普段何気なく用いられているが, 通常は「対応」には厳密な証明が必要である.

一般には「対応」の証明は難しく, 岩澤主予想も例外でない (Washington 1996) [21], (黒川ほか 2005) [11]. しかし, グリーンバーグ予想と呼ばれる未解決予想が成立すれば, 岩澤主予想は容易に証明できることが知られている. 最近, 著者は様々な条件を課した集合の中にもグリーンバーグ予想が成立する例は無限に存在することを示した (Ito) [4].

岩澤不変量には, λ, μ, ν の三種類がある. ここでは, λ に着目する. 素数 p と代数体と呼ばれる集合 K に対し, 岩澤 λ 不変量を $\lambda_p(K)$ と表す.

予想 1. (グリーンバーグ予想) 総実な代数体 K において, $\lambda_p(K) = 0$ だろう.

平方因子を含まない正の整数 d に対し,

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) := \{a + b\sqrt{d} \mid a,\ b \text{ は分数 }\}$$

と定義する. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{5}), \mathbb{Q}(\sqrt{6}), \cdots$ は全て総実代数体である.

$p = 5$ の時, 120 で割った余りが 29, 101 となる d のうち $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ においてグリーンバーグ予想が成立するものは無限に存在することを示した (Ito) [4].

主結果 1. 十分大きな実数 X に対し

$$\sharp\left\{\begin{array}{c|c} 0 < D < X : & \lambda_5(\mathbb{Q}(\sqrt{D})) = 0, \\ \text{基本判別式} & D \equiv 29,\ 101 \bmod 120 \end{array}\right\} \gg \frac{\sqrt{X}}{\log X}.$$

より一般に次を示した (Ito) [4].

主結果 2. p を 3 より大きな素数とし, S_+ と S_- を互いに共通部分を持たない奇素数の有限集合で $p \notin S_+ \cup S_-$ を満たすものとする. $(A, B) \in \{(1, 8), (5, 8), (8, 16)\}$ と $\delta \in \{\pm 1\}$ を固定する. 以下の条件を満たす実二次体の基本判別式 D_0 が存在すると仮定する:

(i) $D_0 \equiv A \bmod B$,
(ii) $D_0 \neq 8$,
(iii) $\left(\dfrac{D_0}{p}\right) = \delta$,
(iv) $h(\mathbb{Q}(\sqrt{D_0})) \not\equiv 0 \bmod p$,
(v) $|R_p(\mathbb{Q}(\sqrt{D_0}))|_p = \dfrac{1}{p}$,
(vi) $q \in S_+, S_-$ に応じて q は $\mathbb{Q}(\sqrt{D_0})$ で分解, 惰性する.

この時, 十分大きな実数 X に対し

$$\sharp\left\{\begin{array}{c|c} & D \equiv A \bmod B, \\ 0 < D < X : & (\frac{D}{p}) = \delta, \\ \text{基本判別式} & \lambda_p(\mathbb{Q}(\sqrt{D})) = 0, \\ & \text{条件 } (*) \text{ を満たす} \end{array}\right\} \gg \frac{\sqrt{X}}{\log X}.$$

$(\cdot/\cdot)$ はルジャンドル記号, $h(K)$ は代数体 K の類数, $R_p(K)$ は K の p-進単数基準, $|\cdot|_p$ は p-絶対値である. $(*)$ は, $q \in S_+, S_-$ に応じて q が $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ で分解, 惰性することを表す.

総実でない代数体の岩澤 λ 不変量については, 一般化グリーンバーグ予想に関する研究が知られている. 2015 年, 著者は様々な条件下で一般化グリーンバーグ予想が成立する虚二次体が無限に存在することを示した (Ito 2015) [3]. 主結果 2 と対になる内容である.

3　埋め込み問題

現代数学における幾何学は微分幾何学と位相幾何学 (トポロジー) の大きく 2 種類に分けられる (Singer, Thorpe 1967) [16].

微分幾何学では図形は伸び縮みしないことを前提に, 角度や長さなどの量に焦点を当てる. 図形の合同の考え方が基本にある. 位相幾何学では図形は伸ばしたり縮めたりできることを前提に, 図形のつながり具合に焦点を当てる.

多変数関数や大きなサイズの行列を用いることにより図を描くことのできない高次元の空間が扱えるようになるため, 幾何学は理論物理学とつながりが深い. 幾何学の一分野「シンプレクティック幾何学 (McDuff, Salamon 1995) [12]」は解析力学を起源としている.

関数の散らばり具合について次の問題を考える.

問 3. $f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $j(x) = x^5$ とする.
(1) $x = 0, 1, 2$ を代入した時の値を含む最小の連続区間をそれぞれ求めなさい.
(2) (1) での区間のうち最小のものを求めなさい.

$f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, $g(2) = 8$, $j(0) = 0$, $j(1) = 1$, $j(2) = 32$ なので, (1) は $f(x)$ の場合 $[0, 2]$, $g(x)$ の場合 $[0, 8]$, $j(x)$ の場合 $[0, 32]$ となる. (2) は $[0, 2]$ である.

シンプレクティック幾何学では特殊な構造を持つ空間上での幾何学を考えるため, 上記のような問題が必ずしも自明ではない. このことは, ある形と大きさを持つ多様体が他の多様体に埋め込まれるか (図 4) という判定が必ずしも容易ではないことを意味する. このような問題を総称して「シンプレクティック埋め込み問題」という (McDuff, Salamon 1995) [12]. 未解決問題も多い.

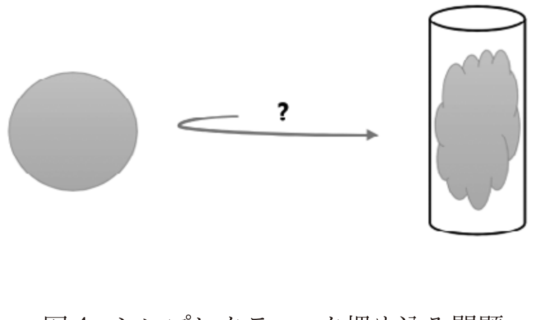

図 4 : シンプレクティック埋め込み問題

最近, 著者は楕円体と呼ばれる多様体 $E(1, a)$ から polydisc と呼ばれる多様体 $P(A + \epsilon, A - \epsilon)$ へのシンプレクティック埋め込み問題を考察し, 特定の大きさの楕円体を埋め込むことができる polydisc の最小サイズを導出した (伊東) [5]. ここで, ϵ は固定された正の実数, a, A は正の実数を表す. a, A の値が大きいほど, 楕円体や polydisc のサイズも大きくなる.

主結果 3. $a \geq 8 + 8\epsilon$ の時,

$$\inf\{A \mid E(1, a) \overset{s}{\hookrightarrow} P(A + \epsilon, A - \epsilon)\} = \sqrt{\frac{a}{2} + \epsilon^2}.$$

記号 $\overset{s}{\hookrightarrow}$ はシンプレクティック埋め込みを表す. 証明の鍵は symplectic cone と呼ばれる集合である. この集合は方程式を用いて具体的に表示されるため, その方程式の性質を考察することにより上記の結果を示すことができた.

4 フェルマーの最終定理

4.1 歴史

定理 1. (フェルマーの最終定理) 3 以上の自然数 n について,

$$x^n + y^n = z^n$$

となる自然数の組 (x, y, z) は存在しない.

17 世紀のフランスの数学者フェルマーが古代の数学者ディオファントスの著作『算術』の余白に残した書き込みから方程式 $x^n + y^n = z^n$ の自然数解の研究が始まった. 多くの人々の仕事を経て 360 年後, アンドリュー・ワイルスとリチャード・テイラーにより上記のように解決された (加藤 1995) [7], (加藤 2009) [8], (斎藤 2009) [15].

4.2 「対応」

フェルマーの最終定理の証明の手順は下記の通りである (加藤 1995) [7], (黒川ほか 2005) [11], (加藤 2009) [8], (斎藤 2009) [15]:

(1) 方程式 $x^n + y^n = z^n$ が自然数解 (x, y, z) を持つと仮定し, その解からある曲線 (楕円曲線) を構成する.

(2) (1) の楕円曲線を用いて構成する関数は保型形式ではないことを示す.

(3) 楕円曲線から構成する関数はすべて保型形式になる (谷山・志村・ヴェイユ予想) ことを示す.

(2), (3) から矛盾が導けるので, 背理法より仮定が誤りである. よって, 解を持たない (証明終).

谷山・志村・ヴェイユ予想が成り立つならば, フェルマーの最終定理が成り立つ. すなわち, フェルマーの最終定理の根底にある理論は谷山・志村・ヴェイユ予想である. この予想は 2 節と同様に, 代数-解析間の「対応」を主張している. 次節でこれについて述べる.

4.3　谷山・志村・ヴェイユ予想

まず初めに「楕円曲線」と「保型形式」がどのようなものか紹介する (Koblitz 1993) [10].

楕円曲線は

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

の形の関数で与えられる曲線のことである. ここで, a, b, c, d は定数を表す. 楕円曲線は楕円でないことを補足する. 楕円曲線上の点たちは良い性質を持つ集合 (群) となることが知られている.

一方で, ある特定の作用を施しても変形しない関数のことを保型形式という. このような関数は非常に特殊であり, 興味深い性質が数多く発見されている.

扱っている関数が保型形式であることが証明できると, 保型形式に関する既知の公式を導入することでその関数をさらに詳しく調べることができる. そのため, 研究対象の関数が保型形式であるかどうかは重要な問題となる.

自然な問いとして, 楕円曲線と保型形式の関係性が挙げられる.

予想 2. (谷山・志村・ヴェイユ予想) ある決まった方法で楕円曲線から構成する関数は保型形式となるだろう.

楕円曲線は代数的対象であり, 保型形式は解析的対象であるため, この予想は代数-解析間の「対応」の存在を主張していることになる.

楕円曲線から「ガロア表現」と呼ばれる関数の一種が得られる. 楕円曲線の代わりにガロア表現を用いて谷山・志村・ヴェイユ予想を言い換えると, 次のようになる.

予想 3. (谷山・志村・ヴェイユ予想') 指定された条件をすべて満たすガロア表現は保型形式から構成できるだろう.

岩澤理論における「対応」をさらに一般化することにより予想 3 が示され, フェルマーの最終定理の解決となった. 予想 3 の証明では, 保型形式の作用素から作られるヘッケ環という集合の性質, ガロア表現のある集まりから決まる集合とヘッケ環の関係性が鍵となった (加藤 1995) [7], (黒川ほか 2005) [11], (加藤 2009) [8], (斎藤 2009) [15].

4.4　その後

予想 3 は「あるガロア表現と保型形式の対応」を主張している. この主張のさらなる拡張として「より一般的なガロア表現と保型形式の対応」が考えられる. この主張は「ラングランズ予想」と呼ばれ, 現在, 整数論最大の未解決問題とされている (黒川ほか 2005) [11], (加藤 2009) [8].

フェルマーの最終定理からラングランズ予想までの歩みは図 5 の通りである. 一つの方程式の研究が整数論全体の大規模な進展につながっている.

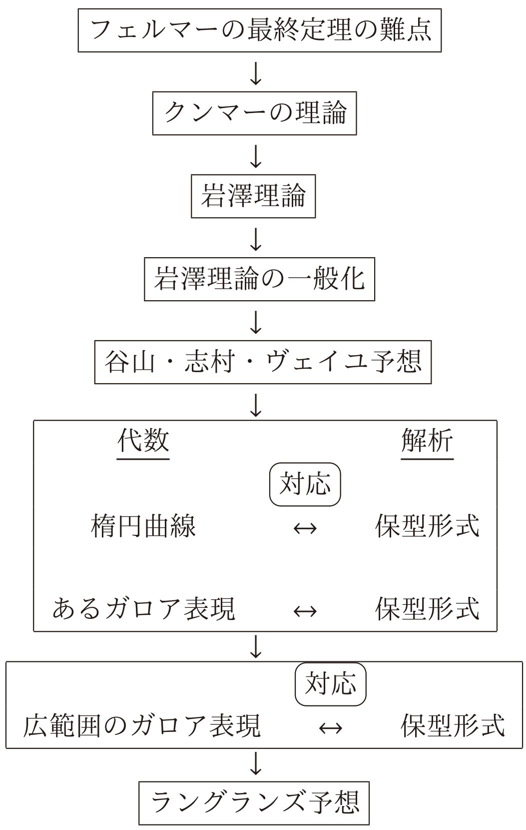

図 5 : 現在までの軌跡

5 微分方程式の実用性

5.1 微分の意義

速度・時間・距離には次の関係式が成り立つ:

$$速度 = \frac{距離}{時間}.$$

厳密には, このような速度を「平均の速度」という.

例えば, 120 km の距離を車で移動するのに 2 時間かかったとする. この場合の平均の速度は時速 60 km である.

実際には, 2 時間の間ずっと時速 60 km で走ったとは限らない. 通常は走り始めは徐々に加速し, 止まる時は徐々に減速する. 自動車のスピードメーターは刻一刻と変化する速度を表示している. このような速度を「瞬間の速度」という.

上記の式「速度 = 距離/時間」に対し, その時間間隔を限りなく小さく取ることで, 瞬間の速度は求められる. これを一般化したものが微分である.

平均の速度と瞬間の速度の比較から分かるように, 微分を導入するとより実際の状況に近い記述ができる. 微分にはこのような重要な役割がある.

5.2 微分方程式

微分方程式の定義を述べる (高野 1994) [19], (神保 2006) [6].

y が x の 1 変数関数の時, x, y と y の導関数 $y', y'', y''', \cdots$ を含んだ方程式を「常微分方程式」という. 例えば,

$$y' = x + 3y, \quad x^2y'' - 4xy' + 6y = 8x^4$$

などがある.

また, z が x と y の 2 変数関数の時, x, y, z と z の偏導関数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \cdots$ を含んだ方程式を「偏微分方程式」という. 例えば,

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 5$$

などがある.

常微分方程式と偏微分方程式を合わせて「微分方程式」という.

微分方程式には, 簡単に解けるものと解き方自体が一つの研究テーマになるほど難しいものとがある. 例えば,

$$y' = 2x$$

という微分方程式は, 微分の逆操作に当たる積分を用いて,

$$y = \int 2xdx = x^2 + (積分定数)$$

である.

微分方程式のよく知られている解法として, 積分・フーリエ変換・ラプラス変換を駆使したものがある.

5.3 微分方程式の意義と応用例

初めに次の問題を考える.

問 4. 50 円のチョコレートと 80 円のクッキーを合わせて 8 個買うとする. 代金の合計を 490 円にするには, チョコレートとクッキーをそれぞれ何個ずつ買えばよいか.

50 円のチョコレートを x 個買うとすると, クッキーの個数は $8 - x$ 個である. 問題の内容を数式で記述すると

$$50x + 80(8 - x) = 490$$

となる.

$$30x = 150$$

なので, $x = 5$ と分かる. 従って, チョコレート 5 個, クッキー 3 個を買えばよい. これも方程式の実生活への適用例である.

一方で 5.1 節で述べたように, 微分には実際の状況により近い形で現象を記述できるという特徴がある. そのため, 方程式に微分を導入した微分方程式を用いると, 下記のような社会現象や自然現象を精密に記述することができる (真貝 2010) [17], (森 2016) [14].

(1) 人口の推移
(2) 広告の効果検証
(3) 株価の変動
(4) 気象予報
(5) 生物種の個体数の推移
(6) 放射性炭素による年代測定
(7) 放熱現象

(8) 太陽系の惑星の運動

より高度な適用例である. 記述した微分方程式を解いて解を求めることで, 数年後どうなるのかという未来の予測が可能となる.

5.4, 5.5, 5.6 節では上記の (1), (2), (6) について, 6 節では (3) について詳細を述べる.

5.4　人口増加問題

微分方程式が広く社会に認められた契機の一つは, マルサスの人口論であると言われる (森 2016) [14].

1798 年, マルサスは著書『人口論』において人口が指数関数的に増加することを微分方程式を用いて示した (森 2016) [14].

時刻 x での人口を $y(x)$ とおくと, Δx だけ時間が経過した時の人口の平均の増加率は

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x}$$

である. この増加率を一人当たりに直すと

$$\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{y(x)\Delta x}$$

となる. 人口の瞬間の増加率 a は

$$a = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{y(x)\Delta x}$$

なので, 導関数の定義から

$$y'(x) = ay(x)$$

と分かる.

この微分方程式は積分と対数関数 log の性質を用いて

$$y(x) = Ne^{ax}\ (N \text{ は定数})$$

と解ける. $y(x)$ は時刻 x での人口, e^{ax} は指数関数なので, 実際に人口が指数関数的に増加することが示せている.

人口増加問題は世界規模での深刻な問題として新聞やニュースでよく取り上げられるが, 上記の式から数年後を予測することができる. 例えば, 人口が 2 倍になるのにかかる時間 t は

$$Ne^{a(x+t)} = 2Ne^{ax}$$

より

$$t = \frac{\log 2}{a}$$

である. 人口の増加率が年 1% の時は

$$t = \frac{\log 2}{0.01} \fallingdotseq 69\ (\text{年後})$$

となる.

5.5　広告の効果検証

商品を売る際にどのように広告を打つべきかという問題はマーケティングにおいて重要である (真貝 2010) [17].

一人一度限りの販売である商品に対し, 全く広告を打たなければ購入者数が徐々に減り, 広告を打つと新たに売れるとする.

この状況を定式化すると, 次の微分方程式となる.

$$y'(x) = -ly(x) + b(x)\frac{m-y(x)}{m}$$

$y(x)$ は時刻 x での売り上げ, l は正の定数, m は商品の売り上げ限界, $b(x)$ は時刻 x での広告がもたらす効果を表す. 上記の方程式の右辺の第一項は広告を打たなければ購入者数が徐々に減ることを, 第二項は広告を打つと新たに売れることを意味する.

この微分方程式を解くことにより売り上げ $y(x)$ が求まり, どのくらいの広告費をかけるべきなのか, 一定した長期間キャンペーンと複数回の短期間大規模キャンペーンとではどちらが効果が高いのか, といった問題を考察することができる.

5.6　年代測定法

通常の炭素 ^{12}C の放射性同位元素 ^{14}C は, 自然の中では一定の存在比率が保たれる. 生物が生きている間は外界との接触により新たな ^{14}C が取り入れられるので, その比率は一定である. しかし, 死んでしまうと新たな ^{14}C は供給されず, 比率は徐々に減る. そのため, ^{14}C の割合からその生物の生きていた年代が特定できる. このような年代の特定方法を「放射性炭素年代測定法」という. 1947 年に, リビーにより開発された (森 2016) [14].

^{14}C の半減期は 5730 年と非常に長いので, 古代遺跡や化石の年代測定にこの方法を用いることができる.

ここで扱う微分方程式は

$$y'(x) = -ry(x)$$

である. $y(x)$ は時刻 x に生物の体内にあった ^{14}C の数, r は定数を表す.

6　数理ファイナンス

6.1　金融経済

通貨の流れには実物経済と金融経済の二種類がある.

実物経済は, 普段の日常生活で物を購入したり, サービスを受けたりする時の通貨の流れのことをいう. これに対し金融経済は, 銀行での資金の貸し借りや株式への投資など, 物・サービスとは独立した通貨の流れのことである.

1970 年代までは通貨の流れの大部分が実物経済によるものであったが, 1971 年の金ドル交換停止を含むニクソンショックを契機とした変動相場制への移行と IT による情報化に伴って通貨が世界を巡るようになり, 現在では金融経済の規模が実物経済の規模をはるかに上回っている. このことは, 一つの地域や機関の金融経済の状況が世界中に影響することを意味している.

そのため, 刻一刻と変化する金融経済を瞬間的かつ精密にとらえる必要がある. 数理ファイナンスは数学を駆使して金融経済の動向を分析する経済学の一分野である.

6.2　ブラック・ショールズ方程式

数理ファイナンス (田畑 1993) [18], (津野 2008) [20] の分野に大きな進展をもたらしたものの一つが「ブラック・ショールズ方程式」である. 本節では, この方程式が必要となった背景を述べる (蓑谷 2000) [13], (石村・石村 2008) [2].

金融商品の代表例に株式・債券・為替があるが, 他にも多くの商品が存在する. 明日どうなるか分からないという不確定性が金融商品にはあるため, リスク回避の目的で様々なものが開発されるのである. 近年よく知られているものに「金融派生商品 (デリバティブ)」がある.

金融派生商品は株式・債券・通貨・金・原油など元の商品 (原資産) から派生した商品であり, 原資産の価格を基準に価値が決まる. 農作物を対象とした先物取引がその典型例であるが, 1990 年前後からは株式や債券などの金融商品を対象とした先物取引・オプション取引なども広く知られるようになった.

「オプション」とは, 満期時に特定の価格 (行使価格) で決められた量の原資産を売買する権利のことである. このオプションという権利を売買する取引のことを「オプション取引」という. ブラック・ショールズ方程式はオプション取引に関するものである.

世界初のオプション取引としてよく引用される例を紹介する (アリストテレス 2001) [1]. ブラック・ショールズ方程式が必要となった理由もここから見つけられる. オリーブ油はオリーブの実を搾油機でしぼることで作られる. 古代ギリシャ時代, 哲学者タレスはその年のオリーブの豊作を予測し, わずかの資金を支払ってその地域中にある搾油機の使用権を予約した. タレスの予測は的中し, その年は実際に豊作となった. 多くの農家は搾油機を借りて油を絞っていたため, その年の搾油機の借り手は非常に多かった. タレスは搾油機の使用料を望むようにコントロールし, 多くの利益を得ることができた.

この例では搾油機の使用権がオプションである. オプションの価格はわずかであったため, たとえオリーブが豊作でなくても, オプションを買う側のタレスはそれほど損をしない. しかし, オプションを売る側の搾油機の貸し手はオリーブの豊作により大きな利益を得る機会を逃したことになる.

こういった状況を回避するため, オプション取引ではオプション価格をどのくらいに設定するべきかという問題が生じる.

フィッシャー・ブラックとマイロン・ショールズはこの問題に取り組み, 1973 年に株や債券といった資本市場における金融商品に有効なオプション価格の評価モデルを発表した. これが「ブラック・ショールズ方程式」である. 厳密な証明はロバート・マートンによる.

オプションの買い手がその権利を実行することを「権利行使」という. 権利行使のタイミングに着目すると, オプションはヨーロピアン, アメリカン, バミューダンの三つのタイプに分類できる. ヨーロピアン・オプションでは, 行使期間の最終日 (満期日) のみ取引を実行するかどうかを決められる. 株や為替はこのタイプである. アメリカン・オプションでは, 取引日から満期日までいつでも権利行使が可能である. バミューダン・オプションではあらかじめ

複数の権利行使日が設定されていて, そのうちのいずれかの日において権利行使が可能である.

ブラック・ショールズ方程式ではヨーロピアン・オプションを扱っている.

6.3　方程式の仕組みと適用例

ブラック・ショールズ方程式の定式化の仕組みと適用例を述べる (蓑谷 2000) [13], (石村・石村 2008) [2].

時刻 t における株価を S_t と書く. この株のオプション価格は株価に伴って変動するため, S_t と t を変数とする 2 変数関数となる. このオプション価格を $f(S_t, t)$ または f と書く. ブラック・ショールズ方程式は $f(S_t, t)$ が満たすべき微分方程式である.

株価 S_t には明日どうなるか分からないという不確定性があり, 不規則に刻一刻と変動する. 複雑な関数ではあるが, 現象の精密な記述が可能な微分方程式にさらに確率論を導入することにより, 株価モデルの記述が可能となる. 以下で詳細を述べる.

液体に浮遊する微粒子が不規則に運動する現象をブラウン運動という. この運動の数学的に厳密なモデルは「ウィーナー過程」として知られている. ブラウン運動の不規則さの理由は多くの粒子からの影響のためと考えられている. この考え方は, 多数の要因により複雑な変動が起こる株価にも通じる. そこで, 株価 S_t はウィーナー過程の一般化「伊藤過程」に従うとすることができる. 数式での記述は

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t \tag{1}$$

となる. μ は期待収益率, σ は株価変動率, d は微分を表す記号である. ウィーナー過程の持つ不規則性が反映されるのは Z_t の部分である.

伊藤過程に従う関数を変数として持つような関数の動きは「伊藤の補題」から導ける. まさに金融派生商品の価格の導出に合致した公式である.

上記の設定で伊藤の補題を用いると

$$\begin{aligned} df &= \left\{\mu S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\right\} dt \\ &\quad + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} dZ_t \end{aligned} \tag{2}$$

となる.

金融商品を購入する際, 一つの銘柄のみを購入するよりも, いくつかの銘柄を組み合わせて購入する方がリスクを回避できることが知られている. どの銘柄の株式を何株購入するかといった金融商品の組み合わせのことを「ポートフォリオ」という.

株価 S_t の株式を $\dfrac{\partial f}{\partial S_t}$ 単位購入し, 価格 $f(S_t, t)$ の株価オプションを 1 単位売却するというポートフォリオを考える. このポートフォリオの価値は

$$S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - f(S_t, t) \tag{3}$$

となる. dt 時間でのポートフォリオの価値の変化量は

$$dS_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - df \tag{4}$$

である. (4) 式に (1), (2) 式を代入すると,

$$dS_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - df = \left\{-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}\right\} dt \tag{5}$$

となり, ウィーナー過程の不規則性が反映されている Z_t の部分が消えてしまう. ブラック・ショールズ方程式論における画期的なアイディアはこの部分である. ポートフォリオの構成の仕方によっては, 取り扱いが大変なウィーナー過程の部分を消去することができるのである.

このことは, dt 時間でのポートフォリオの価値の変化量 (4) は元のポートフォリオの価値 (3) に (安全) 利子を付けたもの, すなわち,

$$dS_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - df = r\left(S_t \frac{\partial f}{\partial S_t} - f(S_t, t)\right) dt \tag{6}$$

であることを意味する. r は安全利子率を表す. (5) 式と (6) 式から

$$rf(S_t, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} + rS_t \frac{\partial f}{\partial S_t} \tag{7}$$

が分かる. この (7) 式が「ブラック・ショールズ方程式」である.

熱伝導方程式型と呼ばれる偏微分方程式は解法が確立されている. その手法を用いることで (7) 式は解ける.

ブラック・ショールズ方程式 (7) の解を用いることでヨーロピアン・オプション価格 $f(S_t, t)$ が実際に導出できる. 例えば, 現時点の株価 14,500 円, 権利行使価格 14,000 円, オプションの期間 2ヶ月, 株価変動率 38%, 安全利子率 6% の時, ヨーロピアン・オプション価格は約 1,232 円になる (石村・石村 2008) [2]. 権利行使価格と期間はオプションを購入する側

が任意に設定できる. 現時点の株価, 株価変動率, 安全利子率は市場から入手する情報である.

このようにブラック・ショールズ方程式は市場に参加するトレーダーの経験値により決められてきた値付けを客観的な理論値で評価することを可能にしたため, 市場における価格決定メカニズムの透明性を向上させた. その結果, 透明性を増した市場に多くの投資家を引き寄せる呼び水となり, その後の資本市場の発展に大きく貢献した.

7 終わりに

本稿では岩澤理論, フェルマーの最終定理, シンプレクティック埋め込み問題, ブラック・ショールズ方程式などを通して, 現代数学における方程式の理論と適用例を紹介してきた. 「数学は実社会においてどのように役立つのか」という問いを耳にすることも多いが, 意外と実用化の研究も進んでいるように思う. 例えば, 2 節「岩澤理論」で述べた p 進解析も, 1980 年代後半から p 進量子力学という形で物理学分野に応用されている. 物理学的な着想からグリーンバーグ予想にアプローチする道はないのだろうか. 最近はこのようなことを考えながら研究を続けている.

謝辞：この論文を書く機会と論文テーマに関する貴重なご助言を下さった櫻井尚子先生, 三宅修平先生に感謝申し上げます. 6 節の数理ファイナンスに関しましては堂下浩先生にご教授賜り, 執筆することができました. 心より感謝いたします.

【引用文献】

[1] アリストテレス著, 牛田徳子訳, 『政治学』, 西洋古典叢書, 京都大学学術出版会, (2001).

[2] 石村貞夫, 石村園子, 『金融・証券のためのブラック・ショールズ微分方程式』, 東京図書, (2008).

[3] Ito, A., ”On certain infinite families of imaginary quadratic fields whose Iwasawa λ-invariant is equal to 1”, Acta Arithmetica 168, pp 301–339, (2015).

[4] Ito, A., ”On certain infinite families of real quadratic fields whose Iwasawa λ-invariant is equal to 0”, preprint.

[5] 伊東杏希子, 「数列と二次体の類数の可除性, シンプレクティック埋め込み問題について」, in preparation.

[6] 神保秀一, 『偏微分方程式入門』, 共立出版, (2006).

[7] 加藤和也, 『解決!フェルマーの最終定理 : 現代数論の軌跡』, 日本評論社, (1995).

[8] 加藤和也, 『フェルマーの最終定理・佐藤-テイト予想解決への道』, 類体論と非可換類体論 1, 岩波書店, (2009).

[9] Katok, S., ”*p-adic Analysis Compared with Real*”, Student Mathematical Library 37, American Mathematical Society, Mathematics Advanced Study Semesters, (2007).

[10] Koblitz, N., ”*Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*”, second edition, GTM 97, Springer-Verlag, (1993).

[11] 黒川信重, 栗原将人, 斎藤毅, 『数論 II 岩澤理論と保型形式』, 岩波書店, (2005).

[12] McDuff, D. and Salamon, D., ”*Introduction to Symplectic Topology*”, Oxford University Press, (1995).

[13] 蓑谷千凰彦, 『よくわかるブラック・ショールズモデル』, 東洋経済新報社, (2000).

[14] 森真, 『自然現象から学ぶ微分方程式』, 共立出版, (2016).

[15] 斎藤毅, 『フェルマー予想』, 岩波書店, (2009).

[16] Singer, I. M. and Thorpe, J. A., ”*Lecture notes on elementary topology and geometry*”, Springer-Verlag, (1967).

[17] 真貝寿明, 『徹底攻略 常微分方程式』, 共立出版, (2010).

[18] 田畑吉雄, 『数理ファイナンス論』, 経済の情報と数理 7, 牧野書店, (1993).

[19] 高野恭一, 『常微分方程式』, 新数学講座 6, 朝倉書店, (1994).

[20] 津野義道, 『数理ファイナンス』, 放送大学教育振興会, (2008).

[21] Washington, L. C., ”*Introduction to Cyclotomic fields*”, second edition, GTM 83, Springer, (1996).