研究ノート

ネットワークのパーコレーション閾値

河野涼太郎*・森口一郎**

要旨：ノード破壊によってネットワークが分断され，多くのノードが通信できなくなった時の破壊割合をパーコレーション閾値と呼ぶ．Cohenらによるパーコレーション理論閾値，そして本研究で提案する破壊後のネットワークのリンク数から導かれる理論閾値の両方をノード破壊シミュレーションの値と比較を行った．その結果，スケールフリーネットワーク以外で両理論値とネットワークの広さ（直径）のピーク位置をパーコレーション閾値とした値が一致した．しかし，スケールフリーネットワークの一種であるバラバシアルバートモデルでは値が一致しないため，理論の修正が必要である．

キーワード：ネットワーク破壊，Molloy-Reed criterion，パーコレーション閾値，ネットワーク直径

Percolation Thresholds of Networks

Ryoutarou KOUNO* and Ichirou MORIGUCHI**

Abstract: The percolation threshold is the destruction ratio of a network divided by node breakdowns, at which communication is impossible between most of nodes. The theoretical percolation thresholds discussed in work by Cohen et al. (2000) and those adopted in the present study have been determined by focusing on the number of links of a network divided by node breakdowns. Both are compared with the node breakdown ratios of simulations at which the network widths (network diameters) of the greatest sub-network showed peaks. As a result, the theoretical thresholds matched the simulation thresholds except in the case of Barabási-Albert model, which is a scale-free network. Therefore, some modification of the present theoretical formulation is required.

Keywords: Network breakdown, Molloy-Reed criterion, Percolation threshold, Network diameter

* 東京情報大学　総合情報学部　総合情報学科（2021年３月卒業）
現　株式会社サンプロスシステム
Faculty of Informatics, Tokyo University of Information Sciences
SUNPROS-SYSTEM CO,LTD.
** 東京情報大学　総合情報学部　情報システム学科
Faculty of Informatics, Tokyo University of Information Sciences

2021年２月８日受付
2021年９月24日受理

１．はじめに

ネットワークはコンピュータやルータなどの通信機器（以下，ノード）とノード同士をつなぐリンクから成り立っている．また各ネットワークが連結することによって巨大な１つのネットワークを構築している．ノードは故障などの様々な要因でシステムが機能停止してしまうことあるが，ネットワーク全体では機能停止したノードを使わない経路が複数存在するため，通信を行うことができる．しかし，機能停止がさらに増加するとネットワークが分断され，通信が行えなくなってしまう．そのため，どの程度の機能停止が発生するとネットワークが分断され通信が行えなくなるのかの指標が必要である．

ノード同士がリンク関係にある巨大な連結部分を巨大ネットワークとし，その中でリンク関係にあるノード数が最多のネットワークを最大ネットワークとする．バラバシは最大ネットワークのノード数が破壊前の全ノード数の１％に減少した時を，ネットワークが分断された時のノード破壊割合（パーコレーション閾値）としている[1]．しかし，基準１％自体に根拠はない上，この破壊割合に対する最大ネットワークのノード数に特徴的変化は全く現れない．

本研究では，先行研究と同じように各ノードがつながりあった巨大な１つのネットワークが出現する条件であるMolloy-Reed criterion[2]を用いてCohenらによる手法[3]でパーコレーション閾値を再導出した．また，本研究での提案手法としてノード破壊後のネットワークの平均リンク数からパーコレーション閾値を算出した．この２つの手法から構造特徴の異なる３つのネットワークのパーコレーション閾値を求め，シミュレーションでのパーコレーション閾値と比較した．ここで，本研究では最大ネットワークの「直径」（任意のノード間の平均ホップ数）がピークとなる破壊割合をシミュレーションでのパーコレーション閾値として採用した．

その結果，アドホックネットワークと同じ構造をもつランダムジオメトリックネットワーク（RGN）では，ランダムネットワーク（RN）やスケールフリーネットワークネットワークの一種であるバラバシアルバートモデル（BA）と比べて低い破壊割合で巨大ネットワークが消失することが判明した．またRN，RGNでは理論値とシミュレーション閾値が一致したが，スケールフリーネットワークであるBAでは値が一致せず，理論式の見直しが必要であることがわかった．

２．使用するネットワークモデル

本研究では，構造の異なる３つのネットワークモデルを使用し，パーコレーション閾値の導出とノード破壊シミュレーションを行った．

２．１　バラバシアルバート（BA）モデル

インターネットと似た構造をもつネットワークモデルとしてバラバシアルバートモデル（以降BAと呼ぶ）[4] がある．本研究では，ネットワーク上のルータが故障によって機能停止した場合のパーコレーション閾値を調べるために採用した．

このネットワークはリンク数が極端に多いノード（ハブノード）が一部存在し，リンク数が少ないノードが多数を占めるスケールフリー性の特徴を持っている．また，k本リンクもったノードがネットワーク上でどれほど存在するかを表すリンク数分布$P(k)$は$k^{-\beta}$のべき乗則に従う（図１）．BAでは$\beta=3$であるため，リンク数kの平均$\langle k\rangle$は算出可能であるが，リンク数２乗の平均$\langle k^2\rangle$は無限系では発散してしまう．しかし，シミュレーションではノード数は有限であるため，$\langle k^2\rangle$は$\langle k\rangle$よりはるかに大きい数値であるが発散はしない．

各ネットワークのリンク数分布

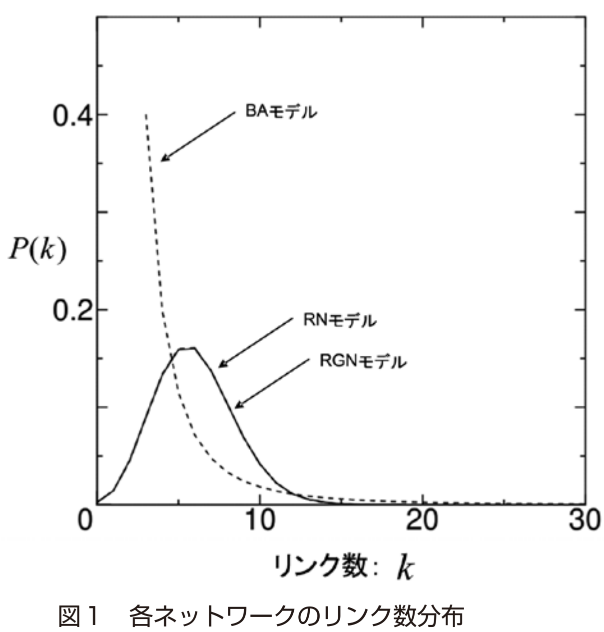

図１　各ネットワークのリンク数分布
RNとRGNは同じリンク数分布となる．

具体的なBAの作成方法として，初期ノードとしてノード数N_0の完全ネットワークを作り，そこに目的とする平均リンク数の半分のリンク数を持つ新規ノードを追加し，既存ノードのリンク数に対して優先接続を行う．これを繰り返し，目的のノード数に達するまで繰り返し作成した．

2．2　ランダムネットワーク（RN）モデル

人と人の接触ネットワークに似た構造をもったネットワークモデルとしてランダムネットワークモデル[4]がある．このネットワークは，各ノードが他のノードとランダムにリンクをつながり，単純なネットワークを構成する．ほとんどのノードが平均リンク数に近いリンク数を持ち，リンク数分布は二項分布になる（図１）．このため，リンク数kの平均を$\langle k\rangle$とすると，リンク数の２乗の平均は，

$$\langle k^2\rangle = \langle k\rangle^2 + \langle k\rangle \tag{1}$$

と表せる．

本研究でのRN作成方法は，ノード接続確率を与えるのではなく，まず全ノードと目標とする平均リンク数を与え，これから全リンク数を算出する．次に全ノードの中からランダムに２ノードを選んでリンクを張り，これを目的とする最終リンク数に達するまで繰り返して作成した．

2．3　ランダムジオメトリックネットワーク（RGN）モデル

アドホックネットワークと同じ構造を持つネットワークモデルとしてランダムジオメトリックネットワークモデル[5]がある．各ノードが電波到達範囲をもっており，範囲内のノード同士がリンクをつなぎネットワークを構成する．しかし，ノードの大半は携帯端末であり電池残量の問題があるため常にネットワークを構成するノードにはなり得ない．そのため，どの程度のノード破壊に対して耐性があるのかを調べるために採用した．

RGNのリンク数分布はRNと同じく二項分布になるため（図１），リンク数の２乗の平均はRNと同じであるが，サイクル（ループ）を多く持つネットワークである（図２）．

具体的なネットワークの作成方法としては，まず一辺Lの正方形フィールド内にN個のノードをランダムに散布する．リンクを張る半径をr_tとすると平均リンク数$\langle k\rangle$は，

$$\langle k\rangle = \frac{\pi r_t^2}{L}(N-1) \tag{2}$$

で与えられる．ここでL＝１とし，Nと$\langle k\rangle$を与えることによってリンク半径r_tは得られ，任意のノード間で距離を計算し，r_t以下であればリンクを形成する．また，フィールドの端の影響をなくすため，周期的境界条件を使用した．

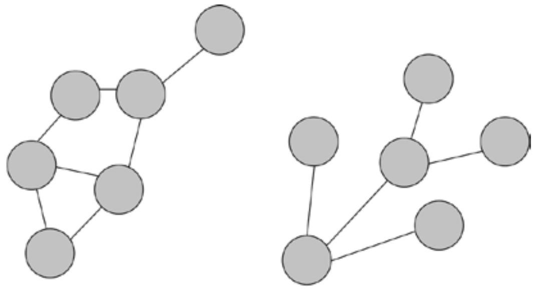

図２　各ネットワークのリンク形状の模式図

3．ランダム破壊でのパーコレーション閾値導出

本章では，まず３．１節で各ノードがつながり合い巨大な１つのネットワークが出現する条件であるMolloy-Reed criterionを記述し，続いて３．２節でCohenらが行ったランダム破壊でのパーコレーション閾値導出を紹介する。ただし，これらの導出ではネットワークがツリー状で，ノードやリンクはループしておらず，リンク先でつながりあっていないと仮定し，またリンク相関もないとしている．次に，３．３節で本研究での提案手法として，ノード破壊後の平均リンク数からパーコレーション閾値を導出する．

3．1　Molloy-Reed criterion

ここではまず，ネットワーク上のあるノードのリンク先の１本にk本リンクの隣接ノードが存在する確率を求め，次にその隣接ノードのリンク先に巨大ネットワークが存在しない確率を求める．

あるノードのリンク先の１本にk本リンクのノードが存在する確率は，ネットワーク上からリンクを１本選び，そのリンク先のノードがk本リンクである確率と等しくなる[6]ため，

$$\frac{kN(k)}{N\langle k\rangle}=\frac{kP(k)}{\langle k\rangle} \tag{3}$$

となる．ここで$\langle k\rangle$はリンク数kの平均，$N(k)$はk本リンクを持っているノード数，$P(k)$はk本リンクを持つノードの全ノード数に対する割合（リンク数分布），$N\langle k\rangle$はネットワークの総リンク数の２倍を表している．

ネットワーク上のノード１つに着目して，着目ノードのリンク先に巨大ネットワークが存在しない確率をqとする．そのときの確率qは隣接ノードが着目ノード以外のリンク先に巨大ネットワークが存在しない確率と等しくなるため（図３），式(3)より，

$$q=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kP(k)}{\langle k\rangle}q^{k-1} \tag{4}$$

となる．ここでq^{k-1}は隣接ノードが着目ノード以外のリンク先に巨大ネットワークが存在しない確率を表している．

確率q = 1で式(4)の両辺はともに１となるため，q = 1の解をもつことがわかる．しかし確率q = 1はリンク先に巨大ネットワークが存在しないということなので，$0<q<1$で解が存在するための条件を求める．すなわち，式(4)の左辺＝$y_1(q)$，右辺＝$y_2(q)$として，$0<q<1$で$y_1(q)$と$y_2(q)$が交わる（解を持つ）条件を求める．

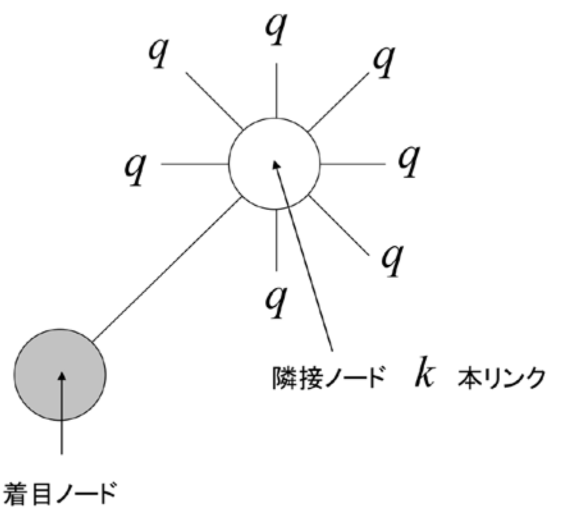

図３　ある着目ノードの１つのリンク先に巨大ネットワークが存在しない場合
qはそのリンク先に巨大ネットワークが存在しない確率

まず，$y_2(q)$を１階微分，２階微分を行い，グラフがどのように変化するかを調べる．

$y_2(q)$の１階微分は，

$$\frac{dy_2(q)}{dq}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kP(k)}{\langle k\rangle}(k-1)q^{k-2} \tag{5}$$

となり，右辺を展開すると，

$$=0+0+\frac{2P(k)}{\langle k\rangle}+\frac{6P(k)}{\langle k\rangle}q+\cdots$$

となる．この$\langle k\rangle$と$P(k)$はともに正の値なので，

$$\frac{dy_2(q)}{dq}>0 \tag{6}$$

である．このことから$y_2(q)$は単調増加する．

さらに，$y_2(q)$の２階微分は，

$$\frac{d^2y_2(q)}{dq^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kP(k)}{\langle k\rangle}(k-1)(k-2)q^{k-3} \tag{7}$$

となり，右辺を展開すると，

$$=0+0+0+\frac{6P(k)}{\langle k\rangle}+\frac{24P(k)}{\langle k\rangle}q+\cdots$$

であるが，$\langle k\rangle$と$P(k)$はともに正の値なので，

$$\frac{d^2y_2(q)}{dq^2}>0 \tag{8}$$

である．このことから$y_2(q)$は下に凸の曲線である．

式(6)と式(8)より考えられる$y_1(q)$と$y_2(q)$のグラフは，図４のようなq = 1で$y_2(q)$の傾きが１以上の場合と図５のようなq = 1で$y_2(q)$の傾きが１未満の場合がある．よって，$0<q<1$で１以外の解を持つためには$y_2(q)$がq = 1のとき傾きが１以上である必要がある．そして，このとき巨大ネットワークが出現する．式(5)にq = 1を代入すると，

$$\frac{dy_2(q)}{dq}=\frac{\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)P(k)}{\langle k\rangle} \tag{9}$$

となり，$y_2(q)$はq = 1のとき傾きが１以上で巨大ネットワークが出現するため，

$$\left.\frac{dy_2(q)}{dq}\right|_{q=1} = \frac{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle}{\langle k\rangle} \geq 1 \qquad (10)$$

となる．これより，

$$\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle} \geq 2 \qquad (11)$$

が導かれる．つまり，$\langle k\rangle$に対する$\langle k^2\rangle$の比が２以上になったときに巨大ネットワークが出現する．すなわち，巨大ネットワークが出現する閾値は，

$$\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle} = 2 \qquad (12)$$

となり，これをMolloy-Reed criterion［2］と呼ぶ．逆にノード破壊を行う場合，この条件は巨大ネットワークが消失する条件と見なすこともできる．

この条件はサイクルのほとんどないRNやBAに適用できるが，サイクルをもつRGNには適用できない．

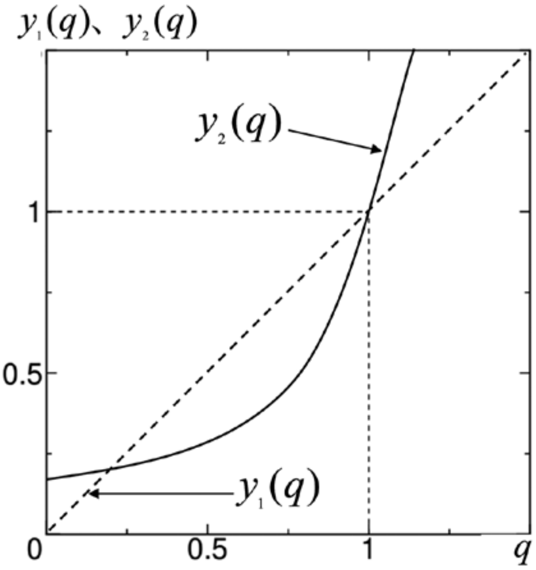

図４　$q=1$で$y_2(q)$の傾きが１以上の時

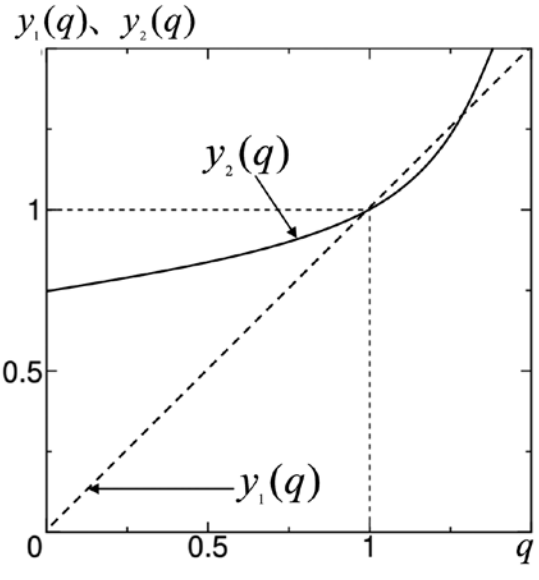

図５　$q=1$で$y_2(q)$の傾きが１未満の時

３．２　Cohenらによるパーコレーション閾値導出

ここで，Molloy-Reed criterionからランダム破壊でのパーコレーション閾値を導出するため，破壊後のネットワークのノードのリンク数kの平均$\langle k\rangle_g$とリンク数２乗の平均$\langle k^2\rangle_g$を求める．本節の導出はCohenらの手法［3］を参考に行った．

ネットワーク上でノードが初期全ノードに対して割合gでランダムに破壊されたとき，ある生き残った１つのノードに着目する．着目ノードが破壊前のリンク数kから破壊後のリンク数k'になる確率は二項分布になるため，

$$ {}_kC_{k'}(1-g)^{k'} g^{k-k'}$$

となる．ここで${}_kC_{k'}$はkからk'になる組み合わせ，$(1-g)^{k'}$はk'本だけリンクが生き残る確率，$g^{k-k'}$は$k-k'$本リンクが破壊される確率を表している．これより破壊後のリンク数分布$P_g(k)$は，

$$P_g(k') = \sum_{k=k'}^{\infty} P_0(k)\,{}_kC_{k'}(1-g)^{k'} g^{k-k'} \qquad (13)$$

となる．ここで$P_0(k)$は破壊前のリンク数分布を表している．

次に，式(13)から破壊後のリンク数の平均とリンク数２乗の平均を求める．破壊後のリンク数の平均$\langle k\rangle_g$は，

$$\begin{aligned}\langle k\rangle_g &= \sum_{k'=0}^{\infty} k' P_g(k') \\ &= \sum_{k'=0}^{\infty} k' \sum_{k=k'}^{\infty} P_0(k)\,{}_kC_{k'}(1-g)^{k'} g^{k-k'} \qquad (14)\end{aligned}$$

となり，式(14)の右辺を展開すると表１のようになる．表の列kは破壊前のリンク数，行k'は破壊後の生存リンク数を表しており，破壊前のリンク数から

表１　式(14)を展開した項

$k' \backslash k$	1	2	3	…
1	$P_0(1)_1C_1(1-g)$	$P_0(2)_2C_1(1-g)g$	$P_0(3)_3C_1(1-g)g^2$	…
2		$2P_0(2)_2C_2(1-g)^2$	$2P_0(3)_3C_2(1-g)^2g$	…
3			$3P_0(3)_3C_3(1-g)^3$	…
⋮				

表２　式(17)を展開した項

$k' \backslash k$	1	2	3	…
1	$P_0(1)_1C_1(1-g)$	$P_0(2)_2C_1(1-g)g$	$P_0(3)_3C_1(1-g)g^2$	…
2		$4P_0(2)_2C_2(1-g)^2$	$4P_0(3)_3C_2(1-g)^2g$	…
3			$9P_0(3)_3C_3(1-g)^3$	…
⋮				

破壊後のリンク数になる組み合わせである．表１の各項を列でまとめると，

$$\begin{aligned}\langle k\rangle_g &= P_0(1)(1-g)+2P_0(2)(1-g)\\&\quad+3P_0(3)(1-g)+\cdots\\&=(1-g)\{P_0(1)+2P_0(2)+3P_0(3)+\cdots\}\\&=(1-g)\sum_{k=0}^{\infty}kP_0(k)\end{aligned}\tag{15}$$

となる．ここで$\sum_{k=0}^{\infty}kP_0(k)$はノード破壊前の平均リンク数$\langle k\rangle_0$を表しており，すなわち破壊後の平均リンク数は，

$$\langle k\rangle_g=(1-g)\langle k\rangle_0\tag{16}$$

と表せる．

一方で，破壊後のリンク数２乗の平均$\langle k^2\rangle_g$は，

$$\begin{aligned}\langle k^2\rangle_g &= \sum_{k'=0}^{\infty}k'^2P_g(k')\\&=\sum_{k'=0}^{\infty}k'^2\sum_{k=k'}^{\infty}P_0(k)_kC_{k'}(1-g)^{k'}g^{k-k'}\end{aligned}\tag{17}$$

となり，式(17)の右辺を展開すると表２のようになる．表の列kは破壊前のリンク数，行k'は破壊後の生存リンク数を表しており，破壊前のリンク数から破壊後のリンク数になる組み合わせである．表２の各項を列でまとめると，

$$\begin{aligned}\langle k^2\rangle_g &= P_0(1)(1-g)+2P_0(2)(1-g)(2-g)\\&\quad+3P_0(3)(1-g)(3-2g)+\cdots\\&=(1-g)\{P_0(1)+2P_0(2)(2-g)\\&\quad+3P_0(3)(3-2g)+\cdots\}\\&=(1-g)\left[\sum_{k=0}^{\infty}kP_0(k)\{k-(k-1)g\}\right]\\&=(1-g)\left\{(1-g)\sum_{k=0}^{\infty}k^2P_0(k)+g\sum_{k=0}^{\infty}kP_0(k)\right\}\end{aligned}\tag{18}$$

となる．ここで$\sum_{k=0}^{\infty}kP_0(k)$はノード破壊前の平均リンク数$\langle k\rangle_0$，$\sum_{k=0}^{\infty}k^2P_0(k)$はノード破壊前のリンク数２乗の平均$\langle k^2\rangle_0$を表しており，破壊後のリンク数２乗の平均は，

$$\langle k^2\rangle_g=(1-g)^2\langle k^2\rangle_0+g(1-g)\langle k\rangle_0\tag{19}$$

と表せる．

式(16)と式(19)を式(12)に代入して，Molloy-Reed criterionを満たすときのノード破壊割合をg_cとすると，

$$\frac{(1-g_c)^2\langle k^2\rangle_0+g_c(1-g_c)\langle k\rangle_0}{(1-g_c)\langle k\rangle_0}=2\tag{20}$$

$$(1-g_c)\frac{\langle k^2\rangle_0}{\langle k\rangle_0}+g_c=2\tag{21}$$

ここで$\langle k^2\rangle_0/\langle k\rangle_0$をAとおくと，

$$(1-g_c)A+g_c=2\tag{22}$$

となる．つまり，ランダム破壊でのパーコレーション閾値は，

$$g_c = 1 - \frac{1}{A-1} \tag{23}$$

となる．これより，破壊前のリンク数の平均とリンク数２乗の平均のみで算出できることがわかる．

例えば，破壊前のRNで平均リンク数$\langle k \rangle_0 = 6$，$\langle k^2 \rangle_0 = \langle k \rangle_0^2 + \langle k \rangle_0$を代入すると$g_c = 0.8333\cdots$となる．しかしBAでは，$\langle k^2 \rangle_0$が発散するため，シミュレーションの破壊前のBAから$\langle k \rangle_0$と$\langle k^2 \rangle_0$を算出して代入する．また，RGNはツリー状のネットワークではないため，そもそもMolloy-Reed criterionの適用外であり，式(23)を使用できない．

３．３　破壊後のリンク数に着目したパーコレーション閾値算出

ここではランダム破壊後のリンク数に着目してパーコレーション閾値を求める手法を解説する．

巨大ネットワークが出現または消失するときの平均リンク数を$\langle k \rangle_d$とすると，RNでは$\langle k \rangle_d > 1$のとき，RGN では$\langle k \rangle_d > 4.52$のときに巨大ネットワークが出現することがわかっている[5]．このことから破壊されたネットワークの平均リンク数が$\langle k \rangle_d$になったときの破壊割合g_cを求める．このときの各ノードがもつリンク数の総和は，破壊前のネットワークの各ノードがもつリンク数の総和から破壊されたリンク数を引くことによって求めることができる．

RNの場合，破壊前の平均リンク数が$\langle k \rangle_0 = 6$であるとき，$\langle k \rangle_d = 1$になったときの総リンク数は，

$$N = 6N - \langle k \rangle_0 g_c N \tag{24}$$

となる．ここでNは$\langle k \rangle_d$になったときの各ノードがもつリンク数の総和，６Nは破壊前の各ノードがもつリンク数の総和，$\langle k \rangle_0 g_c N$は破壊割合$g_c$のときの破壊されたリンク数を表している．これを$g_c$について解くと，

$$g_c = \frac{5}{\langle k \rangle_0} = \frac{5}{6}$$

$$\fallingdotseq 0.83 \tag{25}$$

となり，式(23)から導出したRNでのパーコレーシパーコレーション閾値と一致する．

同様にRGNの場合，破壊前の平均リンク数が$\langle k \rangle_0 = 6$であるとき，$\langle k \rangle_d = 4.52$になったときの各ノードがもつリンク数の総和数は，

$$4.52N = 6N - \langle k \rangle_0 g_c N \tag{26}$$

となる．ここで4.52Nは$\langle k \rangle_d$になったときの各ノードがもつリンク数の総和，６Nは破壊前の各ノードがもつリンク数の総和，$\langle k \rangle_0 g_c N$は破壊割合$g_c$のときの破壊されたリンク数を表している．これを$g_c$について解くと，

$$g_c = \frac{1.48}{\langle k \rangle_0} = \frac{1.48}{6}$$

$$\fallingdotseq 0.25 \tag{27}$$

となる．

４．シミュレーション方法

シミュレーションに使用した各ネットワークはノード数10万，平均リンク６に統一し，試行回数は５回とし，平均した結果を図にプロットした．また，BA作成時の初期ノード数は$N_0 = 4$とした．

破壊シミュレーションでは，まずネットワークを作成後，各ネットワークから破壊割合0.01刻みで全ノードからランダムにノードを抽出し，そのノードが接続しているリンクをネットワークから除去する．その後，破壊後のネットワークからノード数が最多のネットワークを最大ネットワークとして抽出する．次に，抽出した最大ネットワークから任意のノード間の最短経路の平均のホップ数を求める．これを最大ネットワークに属する全てのノードで行い，各ノードの最短経路を平均化した値をネットワーク直径とする．

破壊前のネットワークではノード間の経路が複数存在し，その中から最短経路が選ばれるためネットワーク直径は小さい．しかし，ノードの破壊割合が増加すると，最短経路のリンクが破壊されるためにネットワーク直径が増加する．破壊割合がさらに増加すると，ノード間の経路が１本だけのひも状のネットワークになりネットワーク直径が最大になる．それ以降はネットワークが分断されてバラバラの小ネットワークになり，ネットワーク直径は減少していく（図６）．

このことから，本研究ではノード破壊シミュレーションでのパーコレーション閾値は最大ネットワークの直径が最大になったときの破壊割合とした．

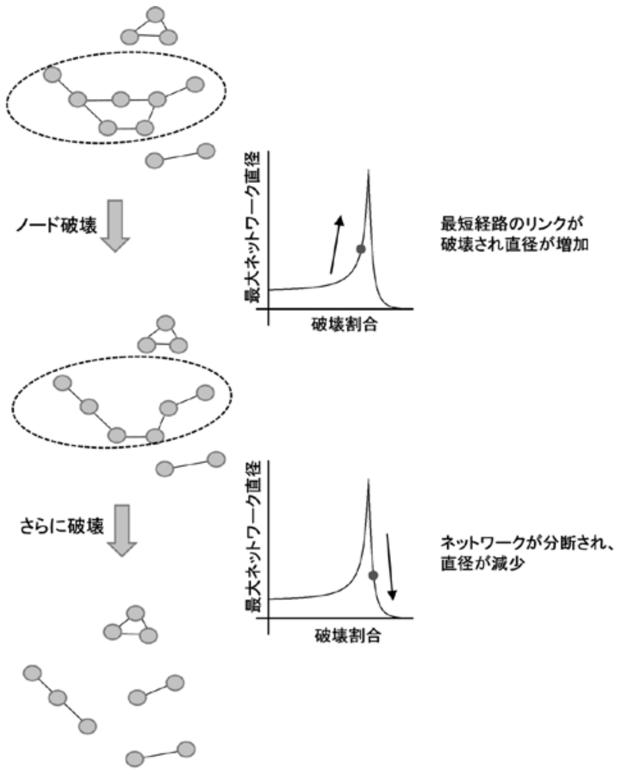

図６　ノード破壊に対する最大ネットワークの直径

５．シミュレーション結果

最大ネットワークのノード数が初期の全ノード数の１％となる時の破壊割合をシミュレーションのパーコレーション閾値とすると[1]，RNの場合は式(23)と式(25)で算出された理論値0.83と合致する（図７）．一方，BAでは破壊前のシミュレーションの$\langle k \rangle_0$と$\langle k^2 \rangle_0$を式(23)に代入して求めた理論値0.96とは異なる値となる（図８）．また，RGNでも式(27)で求めた理論値0.25とは大きく異なる値となる（図９）．特にRGNでは0.25という低い破壊割合付近で最大ネットワークのノード数が急激しているため，分断されやすいネットワークであることがわかる．また，この方法では１％となる破壊割近傍で最大ネットワークのノード数に何ら特異な変化は見られない．

一方，ノード破壊に対する最大ネットワークの直径をみると，RN，BAではネットワークの８割以上のノードを破壊したときに巨大ネットワークが消失する（図10，11）．特にBAは９割ものノードを破壊しなければ巨大ネットワークが消失しない．これは，スケールフリーネットワークの一種であるBAではリンク数の多いハブノードがネットワーク接続性を高めているが，ハブノードは全ノード数に対する割合が少ないためにRNに比べてランダム破壊耐性が高いからである．RGNでは，リンク数の少ないノードでも緊密につながった小ネットワーク群をつなぐ橋渡しノードがあることが多く[7]，0.25という低い破壊割合でもそれらが破壊されると容易に小ネットワーク群が孤立分断されてしまう（図12）．このため，RGNはRNに比べランダム破壊に対して非常に脆弱なネットワークであることがわかる．

また，RN，RGNでは理論値とシミュレーションでの閾値が一致したことから，今回導出したパーコレーション閾値を適用可能である．しかしBAでは値が一致しなかったためスケールフリーネットワークでの理論導出の見直しが必要である．

６．まとめ

ランダム破壊でのパーコレーション閾値をMolloy-Reed criterionと破壊後のリンク数から理論導出し，ノード破壊シミュレーションと比較した．

RN，BAはランダム破壊に強いネットワークに対して，RGNは低い破壊割合で巨大ネットワークが消失することがわかった．また，RN，RGNでは理論値とシミュレーション閾値での値が一致したが，スケールフリーネットワークであるBAでは値が一致しなかった．

本研究結果から，インターネット内のルータが故障したとしてもネットワークでは多くのノード破壊が起きないとネットワークを分断できないが，アドホックネットワークのような端末間通信では，少量のノード破壊で通信が行えなくなると予想できる．また，RNに似ている人と人の接触ネットワークでは，ランダム破壊をウイルスに対して免疫を獲得した人としたときのウイルス蔓延度を見ると，人口の８割以上が免疫獲得するか，他人との濃厚接触を回避しないと蔓延を抑制することができない．

今後の課題として，スケールフリーネットワークでの巨大ネットワークが出現する平均リンク数からパーコレーション閾値を導出することや，リンク数分布がべき乗則に従うスケールフリー性に考慮した新たなパーコレーション閾値の理論導出を行う必要がある．

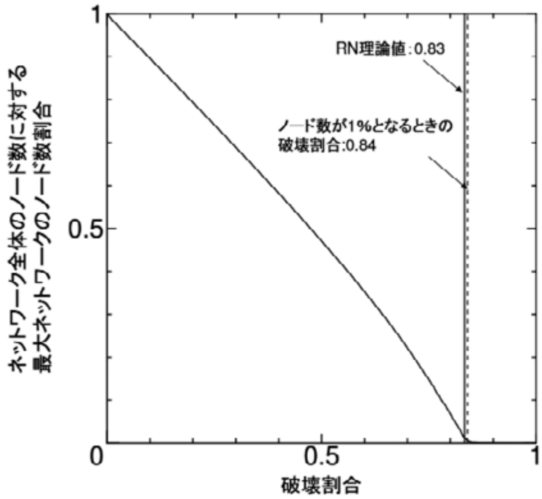

図７　RNでのノード破壊に対する最大ネットワークのノード数割合

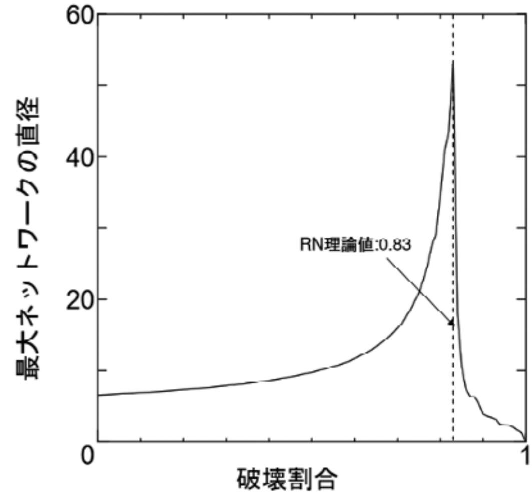

図10　RNでのノード破壊に対する最大ネットワーク直径

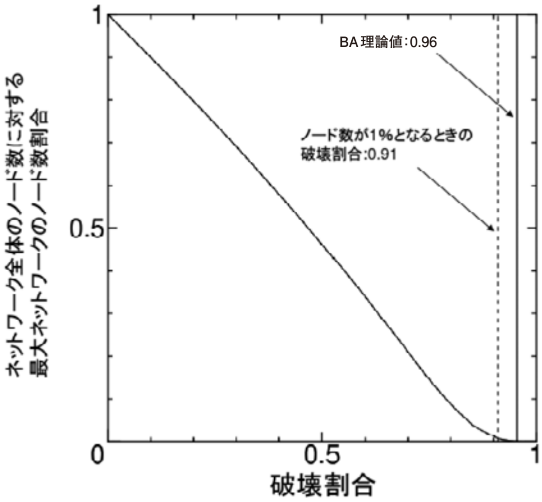

図８　BAでのノード破壊に対する最大ネットワークのノード数割合

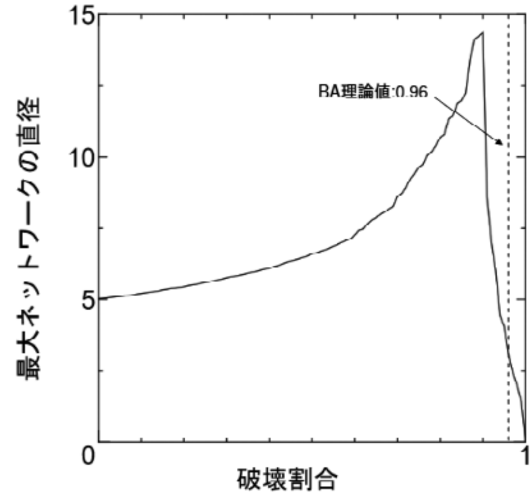

図11　BAでのノード破壊に対する最大ネットワーク直径

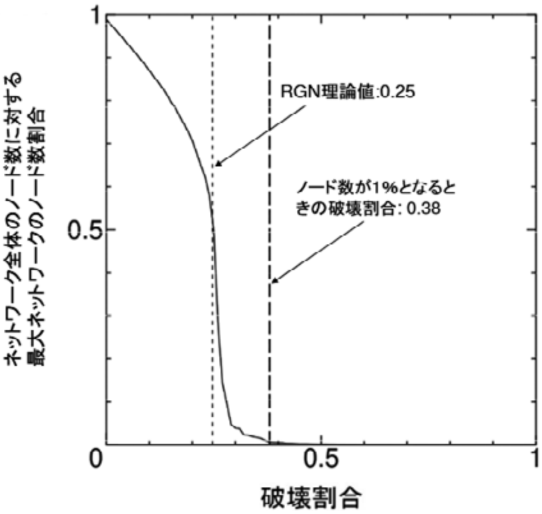

図９　RGNでのノード破壊に対する最大ネットワークのノード数割合

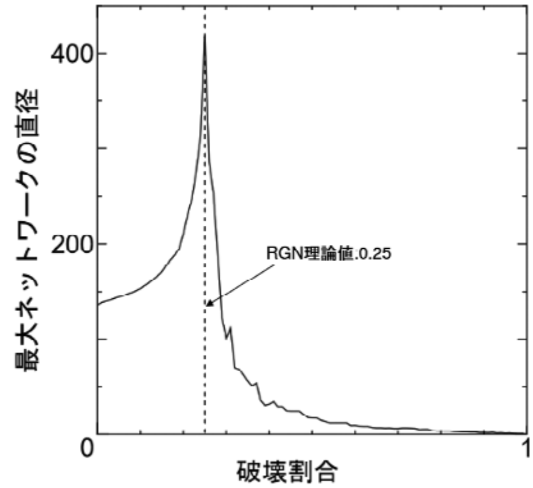

図12　RGNでのノード破壊に対する最大ネットワーク直径

【引用文献】

[1] Barabási, A.-L.: Network Science, p.315, Cambridge (2016).
[2] Molloy, M. and Reed, B.: A critical point for random graphs with a given degree sequence, Ramdom Struct. Algol., Vol. 6, pp.161-180 (1995).
[3] Cohen, R., ben-Avraham, D. and Havllin, S.: Resilience of the Internet to random beakdowns, Phys. Rev. Lett., Vol. 88, 4626 (2000).
[4] Caldarelli, G.: Scale-Free Networks, Oxford (2008).
[5] Dall, J. and Christensen, M.: Random geometric graphs, Phys.Rev.E, Vol.66, 01621 (2002).
[6] 本吉和馬，森口一郎：局所ネットワーク情報を用いたウィルス蔓延抑制，東京情報大学研究論集，Vol. 15, No.2, pp.1-11 (2012).
[7] 徳本文香，森口一郎：ハブ回避ルーティングによる輻輳抑制，東京情報大学研究論集，Vol. 20, No. 2, pp.15-24 (2017).